

SPLAC

Document issu du blog SPLAC.fr

Le paradoxe de l'isolation thermique

Description

Ce document est associé à l'article "Le paradoxe de l'isolation thermique" publié sur le blog SPLAC.

Dans cet article sont présentés les résultats d'un modèle de thermique en géométrie cylindrique.

L'objectif de ce présent document est de détailler:

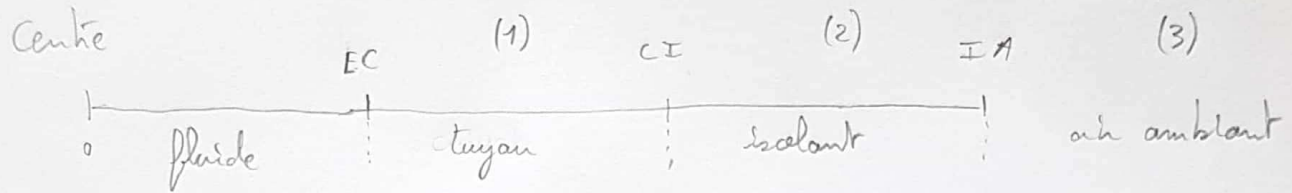
- Les équations physiques utilisées
- Le système d'équations obtenu
- La résolution du système et les solutions obtenues

Les solutions mathématiques obtenues sont utilisées dans le fichier Excel associé pour modéliser le phénomène et tracer les courbes présentées dans l'article.

<https://splac.fr/le-paradoxe-de-lisolation-thermique>

www.splac.fr

Schéma système:



Le flux thermique s'exprime ainsi $\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}$

avec \dot{Q} le flux thermique en W.

ΔT la différence de température en K

R la résistance thermique du milieu en $K \cdot W^{-1}$

Conduction

En géométrie cylindrique, la résistance thermique

s'exprime: $R_{\text{cyl}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L}$

R_1 et R_2 étant les rayons des bornes du milieu (en m)

λ la conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)

L la longueur du tuyau (on la considère de 1 m)

Ainsi:

$$\dot{Q} = (T_1 - T_2) \cdot \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot L}{\ln(R_2/R_1)}$$

Convection

$$\dot{Q} = h S \Delta T$$

h le coefficient de convection ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$)

S la surface d'échange du cylindre (m^2)

avec $S = 2\pi R \cdot L$

Ainsi:

$$\dot{Q} = h 2\pi R \cdot L \cdot (T_1 - T_2)$$

Conditions initiales

$$T_{EC} = T_{\text{fluide}} = 60^\circ C$$

$$T_{\text{air ambiant}} = 20^\circ C$$

$$(1) \dot{Q} = (T_{EC} - T_{CI}) \frac{2\pi\lambda_c}{\ln R_{CI}/R_{EC}}$$

$$(2) \dot{Q} = (T_{CI} - T_{IA}) \frac{2\pi\lambda_i}{\ln R_{IA}/R_{CI}}$$

$$(3) \dot{Q} = (T_{IA} - T_{air}) h 2\pi R_{IA}$$

$$\textcircled{1} (1) = (3) \Leftrightarrow (T_{EC} - T_{CI}) \frac{2\pi\lambda_c}{\ln R_{CI}/R_{EC}} = (T_{IA} - T_{air}) h 2\pi R_{IA}$$

$$\Leftrightarrow T_{IA} h 2\pi R_{IA} = (T_{EC} - T_{CI}) \frac{2\pi\lambda_c}{\ln R_{CI}/R_{EC}} + T_{air} h 2\pi R_{IA}$$

$$\Leftrightarrow T_{IA} = T_{air} + \frac{T_{EC} - T_{CI}}{\cancel{h 2\pi R_{IA}}} \frac{\cancel{2\pi\lambda_c}}{\ln R_{CI}/R_{EC}}$$

$$\Leftrightarrow T_{IA} = T_{air} + \frac{\lambda_c (T_{EC} - T_{CI})}{h R_{IA} \ln(R_{CI}/R_{EC})} \quad (4)$$

④ (4) \rightarrow (2)

$$\dot{Q} = \left(T_{cI} - T_{ah} - \frac{\lambda_c (T_{Ec} - T_{cI})}{h R_{IA} \cdot \ln R_{cI}/R_{Ec}} \right) \frac{2\pi \lambda_i}{\ln R_{IA}/R_{cI}} \quad (5) \quad \text{Inconnues } \dot{Q} \text{ et } T_{cI}$$

⑤ (5) \Rightarrow (1)

$$\left(T_{cI} - T_{ah} - \frac{\lambda_c (T_{Ec} - T_{cI})}{h R_{IA} \ln(R_{cI}/R_{Ec})} \right) \frac{2\pi \lambda_i}{\ln R_{IA}/R_{cI}} = (T_{Ec} - T_{cI}) \frac{2\pi \lambda_c}{\ln R_{cI}/R_{Ec}}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & T_{cI} \frac{\lambda_i}{\ln R_{IA}/R_{cI}} + \frac{T_{cI} \lambda_c \lambda_i}{h R_{IA} \ln R_{cI}/R_{Ec} \cdot \ln R_{IA}/R_{cI}} - \left(T_{ah} + \frac{\lambda_c T_{Ec}}{h R_{IA} \ln R_{cI}/R_{Ec}} \right) \frac{\lambda_i}{\ln R_{IA}/R_{cI}} \\ &= \frac{T_{Ec} \lambda_c}{\ln R_{cI}/R_{Ec}} - T_{cI} \frac{\lambda_c}{\ln R_{cI}/R_{Ec}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow T_{cI} & \left(\frac{\lambda_i}{\ln R_{IA}/R_{cI}} + \frac{\lambda_c \cdot \lambda_i}{h R_{IA} \ln R_{cI}/R_{Ec} \cdot \ln R_{IA}/R_{cI}} + \frac{\lambda_c}{\ln R_{cI}/R_{Ec}} \right) \\ &= \frac{T_{Ec} \lambda_c}{\ln R_{cI}/R_{Ec}} + \frac{T_{ah} \lambda_i}{\ln R_{IA}/R_{cI}} + \frac{T_{Ec} \lambda_c \lambda_i}{h R_{IA} \ln R_{cI}/R_{Ec} \cdot \ln R_{IA}/R_{cI}} \end{aligned}$$

\rightarrow next page 3

$$\Leftrightarrow T_{cI} \left(\ln \left(\frac{R_{cI}}{R_{EC}} \right) \lambda_i + \frac{\lambda_c \lambda_i}{h R_{IA}} + \ln \left(\frac{R_{IA}}{R_{cI}} \right) \lambda_c \right)$$

$$= \ln \left(\frac{R_{IA}}{R_{cI}} \right) T_{EC} \lambda_c + \ln \left(\frac{R_{cI}}{R_{EC}} \right) T_{ah} \lambda_i + \frac{T_{EC} \lambda_c \lambda_i}{h R_{IA}}$$

$$\Leftrightarrow T_{cI} = \frac{\ln \left(\frac{R_{IA}}{R_{cI}} \right) T_{EC} \lambda_c + \ln \left(\frac{R_{cI}}{R_{EC}} \right) T_{ah} \lambda_i + \frac{T_{EC} \lambda_c \lambda_i}{h R_{IA}}}{\ln \left(\frac{R_{IA}}{R_{cI}} \right) \lambda_c + \ln \left(\frac{R_{cI}}{R_{EC}} \right) \lambda_i + \frac{\lambda_c \lambda_i}{h R_{IA}}} \quad (6)$$

T_{cI} dans (1) donne \dot{Q}

puis

\dot{Q} dans (3) donne T_{IA}

$$\dot{Q} = (T_{EC} - T_{cI}) \frac{2\pi \lambda_c}{\ln R_{cI}/R_{EC}}$$

$$(3) \Leftrightarrow \dot{Q} = (T_{IA} - T_{ah}) h 2\pi R_{IA}$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q} = T_{IA} h 2\pi R_{IA} - T_{ah} h 2\pi R_{IA}$$

$$\Leftrightarrow T_{IA} h 2\pi R_{IA} = \dot{Q} + T_{ah} h 2\pi R_{IA}$$

$$\Leftrightarrow T_{IA} = \frac{\dot{Q} + T_{ah} h 2\pi R_{IA}}{h 2\pi R_{IA}}$$

$$\Leftrightarrow T_{IA} = \frac{\dot{Q}}{h 2\pi R_{IA}} + T_{ah}$$