SPLAC

Document issu du blog SPLAC.fr

Couper le chauffage en son absence: la preuve

Description
Voici les équations utilisées pour modéliser l'évolution de la température d'une pièce en fonction du temps.

https://splac.fr/couper-le-chauffage-en-son-absence-la-preuve

www.splac.fr

Considérons une maison composée d'une seule pièce.

La température extérieure est : $T_{ext} = T_e$

La température cible à laquelle on chauffe la pièce est : $T_{cible} = T_c$

Hypothèses : - La pièce a une température homogène donc identique en tout point de l'espace

- On considère une masse volumique "ρ" et une capacité thermique "c" représentatives de l'ensemble "air + murs" de la pièce. Ces valeurs sont constantes dans le temps et l'espace.

L'équation de la chaleur est :

$$\underbrace{\iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, dv}_{\text{Variation température}} = \underbrace{\iint_S -\vec{\varphi}\cdot\vec{n}\, dS}_{\text{Flux thermique échangé avec l'extérieur}} + \underbrace{\iiint_V P\, dv}_{\text{Puissance thermique produite ou consommée dans le système}}$$

En considérant les hypothèses précédentes et en ajoutant le fait que tout échange entre la pièce et le milieu extérieur a lieu par convection, on obtient :

$$\underbrace{m \cdot c \frac{dT}{dt}}_{\text{Variation de température dans la pièce}} = \underbrace{-hS\left(T(t) - T_e\right)}_{\text{Pertes thermiques par convection vers l'extérieur}} + \underbrace{\iiint_V P \cdot dv}_{\text{Chauffage dans la pièce}}$$

Refroidissement de la pièce

La pièce est chauffée et maintenue à température T_c.

A $t=0$, le chauffage est coupé, on a alors :

$\rightarrow P = 0 W$

$\rightarrow T(0) = T_c$

L'équation de la chaleur devient :

$$mc \frac{dT}{dt} = -hS\left(T(t) - T_e\right) = -hS\,T(t) + hS\,T_e$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{hS}{mc} T(t) = \frac{hS}{mc} T_e \quad \text{posons } \boxed{\tau = \frac{mc}{hS}}$$

On reconnait une équation différentielle du premier degré à coefficient constant

pour rappel : $y' + ay = b \Rightarrow y = K\exp(-at) + \frac{b}{a}$

Ainsi $T(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_e$

Or $T(0) = T_c = K + T_e$ donc $K = (T_c - T_e)$

Selon toutes les hypothèses, la température dans la pièce évolue donc ainsi :

$$\boxed{T(t) = (T_c - T_e)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_e}$$

Si $T(0) = T_i$ = Température initiale, au moment où le chauffage est coupé

alors $T(0) = T_i = K + T_e$ donc $K = (T_i - T_e)$

ainsi $\boxed{T(t) = (T_i - T_e)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + T_e}$

Refroidissement

→ quelle est la température Td atteinte au bout d'un refroidissement de durée D ?

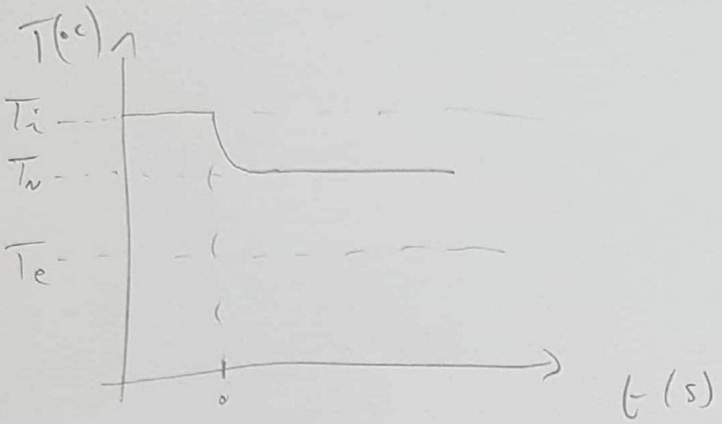
$$T(D) = \boxed{T_d = (T_c - T_e)\exp\left(\frac{-D}{\tau}\right) + T_e}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{T_d - T_e}{T_c - T_e} = \exp\left(\frac{-D}{\tau}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left[\frac{T_d - T_e}{T_c - T_e}\right] = -\frac{D}{\tau}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{D = -\tau . \ln\left[\frac{T_d - T_e}{T_c - T_e}\right]}$$

Réduction de chauffage



T_i = température initiale

T_N = température nouvel équilibre

T_e = Température extérieure.

Équation de la chaleur :

$$m\,c\,.\frac{dT}{dt} = -hS\,(T(t) - T_e) + P_{NC}$$

P_{NC} = Nouvelle puissance de chauffe.

Posons $\boxed{\tau = \frac{mc}{hS}}$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS\,T(t)}{mc} = \frac{hS\,T_e}{mc} + \frac{P_{NC}}{mc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}T(t) = \frac{T_e}{\tau} + \frac{P_{NC}}{mc}$$

On reconnaît $y' + ay = b$
$\rightarrow y = K\exp(-at) + \frac{b}{a}$

$$\Leftrightarrow T(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_e + \frac{P_{NC}}{hS}$$

On a $t = 0$; $T(0) = T_i$

donc $T(0) = K + T_e + \frac{P_{NC}}{hS} = T_i \Leftrightarrow K = T_i - T_e - \frac{P_{NC}}{hS}$

$$\boxed{T(t) = \left(T_i - T_e - \frac{P_{NC}}{hS}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_e + \frac{P_{NC}}{hS}}$$

que vaut T_N ? $P_{NC} = hS\,(T_N - T_e) = hS\,T_N - hS\,T_e$

$\Leftrightarrow \frac{P_{NC} + hS\,T_e}{hS} = T_N \Leftrightarrow \boxed{T_N = T_e + \frac{P_{NC}}{hS}}$

P_{NC} ?
$P_{NC} = hS(T_N - T_e)$

(2'')

Maintien en température constante de la pièce

La température dans la pièce est maintenue constante grâce au chauffage qui équilibre les pertes thermiques.

On a donc $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ car la température est constante.

L'équation de la chaleur devient :

$$0 = -hS(T_c - T_e) + P_{chauffage}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_{chauffage} = hS(T_c - T_e)}$$

Autrement dit, pour une pièce donnée, il faudra plus la chauffer
- → si la température extérieure (T_e) est plus basse
- → si la température cible (T_c) est plus haute

Sans surprise, s'il fait froid dehors ou si on veut une température d'ambiance plus chaude, il faut plus chauffer !!

Montée en température de la pièce

Supposons que le chauffage utilisé est peu puissant et constant. Sa puissance est égale à la puissance nécessaire au maintien en température de la pièce à $T = T_{cible} = T_c$

Ainsi $P_{chauffage} = hS(T_c - T_e)$

L'équation de la chaleur devient donc :

$$mc\frac{dT}{dt} = -hS(T(t) - T_e) + hS(T_c - T_e)$$
$$= -hS\,T(t) + hS\,T_c$$

Posons $\boxed{\tau = \frac{mc}{hS}}$, l'équation devient :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}T(t) = \frac{1}{\tau}T_c$$

On reconnait une équation différentielle du premier degré à coefficient constant. Pour rapel : $y' + ay = b \Rightarrow y = K\exp(-at) + \frac{b}{a}$

Ainsi $T(t) = K\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + T_c$

On a $t=0$, la température de la pièce est à $T(0) = T_i$

Donc $T(0) = T_i = K + T_c \iff K = (T_i - T_c)$

La température dans la pièce évolue donc ainsi :

$$\boxed{T(t) = (T_i - T_c)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + T_c}$$

Montée en température de la pièce avec puissance constante donnée

Supposons que la puissance de chauffage est : Pch.

L'équation de la chaleur est :

$$mc\frac{dT}{dt} = -hS\left(T(t) - Te\right) + Pch$$

En posant $\boxed{\tau = \frac{mc}{hS}}$ on obtient :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}T(t) = \frac{Te}{\tau} + \frac{Pch}{mc}$$

On reconnait une équation différentielle du premier degré à coefficient constants. Pour rappel : $y' + ay = b \Rightarrow y = K\exp(-at) + \frac{b}{a}$

Ainsi $T(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + Te + \frac{Pch}{hS}$

On a $t=0$, la température est à $T(0) = Ti$.

Donc $T(0) = K + Te + \frac{Pch}{hS} = Ti \iff \boxed{K = Ti - Te - Pch/hS}$

La température dans la pièce évolue donc ainsi :

$$\boxed{T(t) = \left(Ti - Te - Pch\cdot\frac{1}{hS}\right)\cdot\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + Te + Pch\cdot\frac{1}{hS}}$$

Chauffage

quelle est la durée "k" nécessaire pour atteindre la température T_c à partir de la température $T(0) = T_1 = T_d$?

$$T(k) = \boxed{T_c = \left(T_d - T_e - \frac{P_c}{hS}\right)\exp\left(\frac{-k}{\tau}\right) + T_e + \frac{P_c}{hS}}$$

$$\Leftrightarrow T_c - T_e - \frac{P_c}{hS} = \left(T_d - T_e - \frac{P_c}{hS}\right)\exp\left(\frac{-k}{\tau}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_c - T_e - \frac{P_c}{hS}}{T_d - T_e - P_c/hS} = \exp\left(\frac{-k}{\tau}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{T_c - T_e - P_c/hS}{T_d - T_e - P_c/hS}\right] = \frac{-k}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = -\tau \cdot \ln\left[\frac{T_c - T_e - P_c/hS}{T_d - T_e - P_c/hS}\right]}$$